ÉCOLE NATIONALE DU GÉNIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1999

MATHÉMATIQUES : ÉPREUVE B

FILIÈRE PHYSIQUE ET SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

DURÉE : 2 heures 30.

N.B. : *Ce sujet comporte 4 pages de texte.*

PROBLEME I

On considère la fonction réelle : $x \longmapsto f(x) = exp(e^x - 1) = e^{(e^x - 1)}$; $n \in \mathbb{N}$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ puis calculer la dérivée n-ème $f^{(n)}$ en fonction des dérivées $f^{(k)}$, $0 \leq k \leq n-1$; vérifier que $f^{(n)}(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

   b. Démontrer que $|f^{(n)}(x)| \leq 2en^n$ pour $x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$.

   c. On pose $T_n = f^{(n)}(0)$. En utilisant une formule de Taylor prouver que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{n!} x^n$ converge pour $x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$ et a pour somme $f(x)$.

2. On pose $U_n = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $U_0 = 1$.

   a. Vérifier par récurrence que pour tout $n \geq 0$: $U_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k U_k$.

   b. Montrer que T_{n+1} s'exprime de façon analogue en fonction des T_k. En déduire que $T_n = U_n$.

PROBLEME II

Préliminaire: *Les notations choisies ne sont valables que dans ce préliminaire.* On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $w_0>0$, $v_0>0$, $u_0>0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n + v_n + w_n\right), \quad v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n} \quad \text{et} \quad 3\, w_{n+1}^{-1} = u_n^{-1} + v_n^{-1} + w_n^{-1}.$$

Démontrer que $\forall\ n \geq 1$ on a $w_n < v_n < u_n$ puis que (u_n) et (w_n) sont adjacentes. Conclure quant à la convergence de ces 3 suites.

I

On donne une suite $n \longmapsto a_n$ de réels strictement positifs.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : la moyenne arithmétique A_n des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, est supérieure ou égale à leur moyenne géométrique G_n, c'est-à-dire

$$A_n = \frac{1}{n}\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) \geq G_n = \left(a_1 . a_2 \ldots\ldots a_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

   a. Démontrer que $\mathcal{P}_2$ est vraie. Démontrer ensuite, par exemple par récurrence, que la propriété P_k est vraie pour tout $k \geq 3$. *On pourra poser*

$$g(x) = \frac{1}{k+1}\left(x + a_1 + a_2 + \ldots + a_k\right) - \left(x\, a_1 a_2 \ldots a_k\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

   b. Soit $n \longmapsto H_n$ définie par $\frac{n}{H_n} = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}$, déduire de **a.** la position de H_n par rapport à A_n et G_n ($n \in \mathbb{N}^*$). (H_n *est la moyenne harmonique des* a_i)

2. Soit f une fonction continue par morceaux de $[a,b]$, $a < b$, dans $\mathbb{R}_+^*$; $n \in \mathbb{N}^*$.

   a. Vérifier que si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [a,b]^n$, on a $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell n\left(f(x_k)\right) \leq \ell n\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_k)\right]$.

   b. En déduire que $\frac{1}{b-a}\int_a^b \ell n\left(f(x)\right)\, dx \leq \ell n\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on définit $u_n = \frac{1}{n-1}\int_1^n \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx$. Démontrer que $u_n \leq e$. Calculer $\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n$.

4. On suppose ici que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge et a pour somme $S > 0$.

a. Établir la relation $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots na_n}{n(n+1)}$.

Démontrer que $\sum_{n=1}^{\infty} G_n$ converge et que sa somme G vérifie $G \leq eS$, on admet l'inégalité $n! \geq \left(\frac{n+1}{e}\right)^n$; montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} H_n$ converge. $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ est-elle aussi convergente ?

b. Montrer que les 3 séries entières $\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} G_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$ $(x \in \mathbb{C})$ ont des rayons de convergence au moins égaux à 1.

5. On suppose que la série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ converge et que $\lim_{n \to \infty} na_n = 0$. Démontrer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge aussi et comparer les sommes de ces 2 séries.

II

Soit a et r deux réels strictement positifs ; on pose $a_k = a + (k-1)r$, $k \in \mathbb{N}^*$.

On considère à nouveau $A_{n+1} = \frac{a_1 + \ldots + a_{n+1}}{n+1}$; $G_{n+1} = \left(a_1 \ldots a_{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}$.

On veut établir que $v_n = \frac{A_{n+1}}{G_{n+1}}$ converge et calculer sa limite. On pose $w_n = \ell n(v_n)$.

1. Vérifier que $w_n = \ell n\left(\frac{r}{2} + \frac{a}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \ell n\left(\frac{a}{n} + \frac{k.r}{n}\right)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

2. Soient x,y,z trois réels vérifiant $0 < x < y < z$. Vérifier que :
$\int_x^y \ell n\ t\ dt \leq (y-x)\ \ell n\ y \leq \int_y^z \ell n\ t\ dt$.

3. En déduire que : $\frac{1}{r} \int_{b_{k-1}}^{b_k} \ell n\ t\ dt \leq \frac{1}{n} \ell n \left(\frac{a}{n} + \frac{k.r}{n}\right) \leq \frac{1}{r} \int_{b_k}^{b_{k+1}} \ell n\ t\ dt$ avec $n \geq 3$ et

$1 \leq k \leq n$ où $b_k = \dfrac{a+(k-1)r}{n}$.

4. On pose : $s_n = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \ell n\left(\dfrac{a}{n} + \dfrac{k.r}{n}\right)$; encadrer le réel s_n.

5. Déduire des questions précédentes que (w_n) converge ainsi que (v_n) et déterminer la limite de la suite v_n.